

Matura z Matematyki (poziom podstawowy) - Maj 2025

Zadanie 1 (1 pkt)

Oblicz wartość wyrażenia $(\sqrt{32} - \sqrt{2})^2$.

- A. 16
- B. 18
- C. 30
- D. 34

✓ Odpowiedź: B

Wyjaśnienie:

Istnieje kilka podejść do tego zadania. Można wykorzystać wzór na kwadrat różnicy $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, ale najprościej zauważyć, że $\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = 4\sqrt{2}$.

Obliczenia wyglądają następująco:

$$(\sqrt{32} - \sqrt{2})^2 = (4\sqrt{2} - \sqrt{2})^2 = (3\sqrt{2})^2 = 9 \cdot 2 = 18$$

Zadanie 2 (1 pkt)

Oblicz wartość wyrażenia $(5^{12} + 5^{13} + 5^{14})/5^{12}$.

- A. 30
- B. 31
- C. 5^{12}
- D. 5^{27}

✓ Odpowiedź: B

Wyjaśnienie:

Korzystając z własności potęgowania, możemy zapisać liczniki w następujący sposób:

$$5^{13} = 5^{12} \cdot 5$$

$$5^{14} = 5^{12} \cdot 5^2 = 5^{12} \cdot 25$$

Po podstawieniu do wyrażenia otrzymujemy:

$$(5^{12} + 5^{13} + 5^{14})/5^{12} = (5^{12} + 5^{12} \cdot 5 + 5^{12} \cdot 25)/5^{12} = 5^{12}(1 + 5 + 25)/5^{12} = 1 + 5 + 25 = 31$$

Zadanie 3 (1 pkt)

Znajdź wartość wyrażenia $\log_3 108 - 2\log_3 2$.

A. 3

B. 9

C. $\log_3 104$

D. $2\log_3 54$

✓ **Odpowiedź: A**

Wyjaśnienie:

Wykorzystujemy własności logarytmów:

$$\log_3 108 - 2\log_3 2 = \log_3 108 - \log_3 2^2 = \log_3 108 - \log_3 4 = \log_3 (108/4) = \log_3 27 = 3$$

Zadanie 4 (1 pkt)

Dla każdej liczby rzeczywistej x wartość wyrażenia $(3x + 2)^2 - (2x - 3)^2$ jest równa:

A. $5x^2 - 5$

B. $5x^2 + 13$

C. $5x^2 + 24x - 5$

D. $5x^2 + 24x - 13$

✓ **Odpowiedź: C**

Wyjaśnienie:

Wykorzystamy wzory na kwadrat sumy i kwadrat różnicy:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ oraz } (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Rozwijając wyrażenie:

$$\begin{aligned} (3x + 2)^2 - (2x - 3)^2 &= 9x^2 + 12x + 4 - (4x^2 - 12x + 9) = \\ &= 9x^2 + 12x + 4 - 4x^2 + 12x - 9 = 5x^2 + 24x - 5 \end{aligned}$$

Zadanie 5 (2 pkt)

Udowodnij, że dla każdej nieparzystej liczby naturalnej n liczba $3n^2 + 2n + 7$ jest podzielna przez 4.

✓ **Odpowiedź:**

Udowodniono, rozkładając liczbę jako $4 \cdot (3k^2 + 4k + 3)$

Wyjaśnienie:

Krok 1. Przedstawienie liczby nieparzystej.

W algebrze liczby parzyste można zapisać jako $2k$, a liczby nieparzyste jako $2k + 1$ (gdzie k jest liczbą całkowitą). Podstawiając wyrażenie $2k + 1$ do naszej liczby, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} 3 \cdot (2k + 1)^2 + 2 \cdot (2k + 1) + 7 &= \\ &= 3 \cdot (4k^2 + 4k + 1) + 4k + 2 + 7 = \\ &= 12k^2 + 12k + 3 + 4k + 2 + 7 = \\ &= 12k^2 + 16k + 12 = \end{aligned}$$

$$= 4 \cdot (3k^2 + 4k + 3)$$

Krok 2. Podsumowanie dowodu.

Wartość wyrażenia $3k^2 + 4k + 3$ jest dodatnia dla wszystkich wartości k , więc iloczyn $4 \cdot (3k^2 + 4k + 3)$ jest podzielny przez 4, co kończy dowód.

Zadanie 6 (1 pkt)

Rozwiąż nierówność $3 - 2(1 - 2x) \geq 2x - 17$. Na którym rysunku poprawnie zaznaczono na osi liczbowej zbiór wszystkich liczb rzeczywistych spełniających powyższą nierówność?

✓ **Odpowiedź: D**

Wyjaśnienie:

Przekształcamy nierówność krok po kroku:

$$3 - 2(1 - 2x) \geq 2x - 17$$

$$3 - 2 + 4x \geq 2x - 17$$

$$1 + 4x \geq 2x - 17$$

$$4x - 2x \geq -17 - 1$$

$$2x \geq -18$$

$$x \geq -9$$

Zbiór rozwiązań to przedział $(-9, +\infty)$, co odpowiada rysunkowi D.

Zadanie 7 (1 pkt)

Równanie $2x(x + 3)(x^2 + 25) = 0$ w zbiorze liczb rzeczywistych ma dokładnie:

- A. dwa rozwiązania: (-3) oraz 0
- B. dwa rozwiązania: (-3) oraz 2
- C. trzy rozwiązania: (-5) , (-3) oraz 0
- D. cztery rozwiązania: (-5) , (-3) , 0 oraz 5

✓ **Odpowiedź: A**

Wyjaśnienie:

Aby wyrażenie było równe 0, przynajmniej jeden z czynników musi być równy 0:

$$2x = 0 \vee x + 3 = 0 \vee x^2 + 25 = 0$$

$$x = 0 \vee x = -3 \vee x^2 = -25$$

Równanie $x^2 = -25$ nie ma rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych, ponieważ kwadrat liczby rzeczywistej nie może być ujemny.

Zatem jedynymi rozwiązaniami są $x = 0$ oraz $x = -3$.

Zadanie 8 (1 pkt)

Dla każdej liczby rzeczywistej x różnej od (-2) oraz różnej od 0 wartość wyrażenia $(x^2 + x)/(x^2 + 4x + 4) \cdot (x + 2)/x$ jest równa wartości wyrażenia:

A. $(x+2)/(4x+4)$

B. $(x+1)/(4x+5)$

C. $(x+1)/(x+2)$

D. $2x/(x+2)$

✓ **Odpowiedź: C**

Wyjaśnienie:

Zauważmy, że $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$ oraz $x^2 + x = x(x + 1)$. Podstawiając te wyrażenia:

$$(x^2 + x)/(x^2 + 4x + 4) \cdot (x + 2)/x = [x(x+1)]/[(x+2)^2] \cdot (x+2)/x = [(x+1)(x+2)]/[(x+2)^2] = (x+1)/(x+2)$$

Zadanie 9 (2 pkt)

Zarząd firmy wydzielił z budżetu kwotę 1 200 000 złotych łącznie na projekty badawcze dla dwóch zespołów: A i B. W pierwszym półroczu realizacji tych projektów oba zespoły wykorzystały łącznie 146 700 złotych - zespół A wykorzystał 13% przyznanych mu środków, a zespół B wykorzystał 11% przyznanych mu środków.

Oblicz kwotę przyznaną zespołowi A na realizację projektu badawczego.

✓ **Odpowiedź: 735 000 złotych**

Wyjaśnienie:

Krok 1. Wprowadzenie oznaczeń.

x - kwota przyznana zespołowi A

$0,13x$ - tyle pieniędzy wydał zespół A

$1200000 - x$ - kwota przyznana zespołowi B

$0,11 \cdot (1200000 - x) = 132000 - 0,11x$ - tyle pieniędzy wydał zespół B

Krok 2. Obliczenie kwoty przyznanej zespołowi A.

Z treści zadania wynika, że suma dotychczasowych wydatków zespołu A i B wynosi 146 700 złotych:

$$0,13x + 132000 - 0,11x = 146700$$

$$0,02x + 132000 = 146700$$

$$0,02x = 14700$$

$$x = 735000$$

Czyli zespół A otrzymał na projekt kwotę 735 000 złotych.

Zadanie 10 (2 pkt)

Rozwiąż nierówność $3(2x^2 + 1) < 11x$.

✓ **Odpowiedź: $x \in (1/3, 3/2)$**

Wyjaśnienie:

Krok 1. Przekształcenie nierówności do postaci ogólnej.

$$3(2x^2 + 1) < 11x$$

$$6x^2 + 3 < 11x$$

$$6x^2 - 11x + 3 < 0$$

Krok 2. Obliczenie miejsc zerowych wielomianu.

Mamy wielomian $ax^2 + bx + c$ gdzie $a = 6$, $b = -11$, $c = 3$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-11)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 3 = 121 - 72 = 49$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7$$

$$x_1 = (-b - \sqrt{\Delta})/(2a) = (11 - 7)/(12) = 4/12 = 1/3$$

$$x_2 = (-b + \sqrt{\Delta})/(2a) = (11 + 7)/(12) = 18/12 = 3/2$$

Krok 3. Analiza przedziałów.

Ponieważ współczynnik przy x^2 jest dodatni, parabola ma ramiona skierowane do góry. Oznacza to, że wielomian jest ujemny (i nierówność spełniona) pomiędzy miejscami zerowymi, czyli dla $x \in (1/3, 3/2)$.

Zadanie 11 (4 pkt)

Funkcja f jest określona następująco:

$$f(x) = x + 5 \text{ dla } x \in \langle -4, -2 \rangle$$

$$f(x) = 3 \text{ dla } x \in (-2, 2)$$

$$f(x) = -3x + 9 \text{ dla } x \in (2, 4)$$

Uzupełnij zdania:

1. Dziedziną funkcji f jest przedział
2. Zbiorem wartości funkcji f jest przedział
3. Zbiorem wszystkich argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości dodatnie jest przedział
4. Zbiorem wszystkich rozwiązań równania $f(x) = 3$ jest przedział

✓ **Odpowiedź:**

1. $\langle -4; 4 \rangle$
2. $(-3; 3)$
3. $\langle -4; 3 \rangle$
4. $\langle -2; 2 \rangle$

Wyjaśnienie:

Krok 1. Wyznaczanie dziedziny funkcji f .

Funkcja jest określona od $x = -4$ do $x = 4$ (bez punktu $x = 4$). Zatem dziedziną jest przedział $\langle -4; 4 \rangle$.

Krok 2. Wyznaczanie zbioru wartości funkcji f .

Z wykresu wynika, że funkcja przyjmuje wartości od $y = -3$ (dla $x = 4$, choć ten punkt nie należy do wykresu) do $y = 3$ (dla przedziału $(-2, 2)$). Zatem zbiorem wartości jest przedział $(-3; 3)$.

Krok 3. Wyznaczanie zbioru argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości dodatnie.

Wartości dodatnie są przyjmowane dla argumentów od $x = -4$ aż do $x = 3$ (przy $x = 3$ funkcja przyjmuje wartość 0, co widać z równania $-3x + 9 = 0 \Rightarrow x = 3$). Zatem szukanym przedziałem jest $\langle -4; 3 \rangle$.

Krok 4. Wyznaczanie zbioru rozwiązań równania $f(x) = 3$.

Wartość $f(x) = 3$ funkcja przyjmuje dla argumentów z przedziału $\langle -2; 2 \rangle$, co wynika bezpośrednio z definicji funkcji.

Zadanie 12 (4 pkt)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) przedstawiono fragment paraboli, która jest wykresem funkcji kwadratowej f . Wierzchołek tej paraboli ma współrzędne $(3, 6)$. Ta parabola przecina oś Oy w punkcie współrzędnych $(0, 3)$.

Zadanie 12.1. (2 pkt)

Wyznacz wzór funkcji f w postaci kanonicznej.

✓ **Odpowiedź:** $f(x) = -1/3(x - 3)^2 + 6$

Wyjaśnienie:

Korzystamy z postaci kanonicznej funkcji kwadratowej $f(x) = a(x - p)^2 + q$, gdzie (p, q) to współrzędne wierzchołka paraboli. W naszym przypadku $p = 3$ i $q = 6$, więc:

$$f(x) = a(x - 3)^2 + 6$$

Do wyznaczenia współczynnika a wykorzystamy punkt przecięcia z osią Oy , czyli $(0, 3)$:

$$3 = a(0 - 3)^2 + 6$$

$$3 = 9a + 6$$

$$-3 = 9a$$

$$a = -1/3$$

Zatem wzór funkcji to:

$$f(x) = -1/3(x - 3)^2 + 6$$

Zadanie 12.2. (1 pkt)

Oś symetrii wykresu funkcji f jest prosta o równaniu:

A. $x = 3$

B. $x = -3$

C. $y = 6$

D. $y = -6$

✓ **Odpowiedź:** A

Wyjaśnienie:

Oś symetrii paraboli to linia równoległa do osi Oy , przechodząca przez wierzchołek. Ponieważ wierzchołek ma współrzędną $x = 3$, oś symetrii jest prosta o równaniu $x = 3$.

Zadanie 12.3. (1 pkt)

Funkcja g jest określona dla każdej liczby rzeczywistej x wzorem $g(x) = f(x) - 3$. Liczby x_1 oraz x_2 są różnymi miejscami zerowymi funkcji g .

Uzupełnij zdanie: Suma $x_1 + x_2$ jest równa

✓ **Odpowiedź:** 6

Wyjaśnienie:

Funkcja $g(x) = f(x) - 3$ powstaje w wyniku przesunięcia się funkcji $f(x)$ o trzy jednostki w dół. Miejscami zerowymi są argumenty x , dla których $g(x) = 0$, czyli $f(x) = 3$.

Z wykresu i własności symetrii paraboli wynika, że pierwszym miejscem zerowym będzie $x_1 = 0$ (punkt przecięcia z osią Oy), a drugim miejscem zerowym będzie $x_2 = 6$ (punkt symetryczny do $(0,3)$ względem osi symetrii $x = 3$).

Zatem suma $x_1 + x_2 = 0 + 6 = 6$.

Zadanie 13 (1 pkt)

Funkcja liniowa f jest określona wzorem $f(x) = (3 - m)x - 4$. Funkcja f nie ma miejsca zerowego dla m równego:

- A. (-3)
- B. 0
- C. 3
- D. 4

✓ Odpowiedź: C

Wyjaśnienie:

Funkcja liniowa nie będzie miała miejsca zerowego wtedy i tylko wtedy, gdy jej współczynnik kierunkowy będzie równy 0 (funkcja stała, równoległa do osi Ox), a wyraz wolny będzie różny od 0 .

W naszym przypadku współczynnik kierunkowy to $(3-m)$. Aby był on równy 0 :

$$3 - m = 0$$

$$m = 3$$

Dla $m = 3$, funkcja ma postać $f(x) = 0 \cdot x - 4 = -4$, czyli jest to funkcja stała przyjmująca zawsze wartość -4 . Ponieważ $-4 \neq 0$, funkcja nie ma miejsca zerowego.

Zadanie 14 (2 pkt)

Ciąg (a_n) jest określony następująco:

$$a_1 = 2$$

$$a_{n+1} = 2a_n + 1$$

dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

Zadanie 14.1. (1 pkt)

Trzeci wyraz ciągu (a_n) jest równy:

- A. 4
- B. 5
- C. 7
- D. 11

✓ Odpowiedź: D

Wyjaśnienie:

Obliczamy kolejne wyrazy ciągu:

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 2 \cdot a_1 + 1 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

$$a_3 = 2 \cdot a_2 + 1 = 2 \cdot 5 + 1 = 11$$

Zadanie 14.2. (1 pkt)

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F - jeśli jest fałszywe.

1. Ciąg (a_n) jest arytmetyczny.
2. Ciąg (a_n) jest geometryczny.

✓ **Odpowiedź:**

1. FAŁSZ
2. FAŁSZ

Wyjaśnienie:

Już po wypisaniu pierwszych trzech wyrazów widać, że ten ciąg ani nie jest arytmetyczny, ani nie jest geometryczny. Ciąg arytmetyczny ma stałą różnicę między kolejnymi wyrazami, a geometryczny ma stały iloraz. W naszym przypadku:

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 5$$

$$a_3 = 11$$

Różnice: $5-2=3$, $11-5=6$ - różne, więc ciąg nie jest arytmetyczny.

Ilorazy: $5/2=2.5$, $11/5=2.2$ - różne, więc ciąg nie jest geometryczny.

Zadanie 15 (3 pkt)

Wyznacz wartość m , dla której trzywyrazowy ciąg $(2m + 11, m^2 + 3, 5 - m)$ jest arytmetyczny i malejący.

✓ **Odpowiedź: $m = 2,5$**

Wyjaśnienie:

Krok 1. Zapisanie warunku ciągu arytmetycznego.

Z własności ciągu arytmetycznego wynika, że dla trzech kolejnych wyrazów zachodzi następująca równość:

$$a_2 = (a_1 + a_3)/2$$

Podstawiając znane wyrazy:

$$m^2 + 3 = (2m + 11 + 5 - m)/2$$

$$m^2 + 3 = (m + 16)/2$$

$$m^2 + 3 = m/2 + 8$$

$$2m^2 + 6 = m + 16$$

$$2m^2 - m - 10 = 0$$

Krok 2. Rozwiązanie równania kwadratowego.

Otrzymaliśmy równanie kwadratowe w postaci ogólnej $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a = 2$, $b = -1$, $c = -10$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-10) = 1 + 80 = 81$$

$$\sqrt{\Delta} = 9$$

$$m_1 = (-b - \sqrt{\Delta})/(2a) = (1 - 9)/4 = -8/4 = -2$$
$$m_2 = (-b + \sqrt{\Delta})/(2a) = (1 + 9)/4 = 10/4 = 2,5$$

Krok 3. Sprawdzenie warunku ciągu malejącego.

Teraz musimy sprawdzić, dla którego z tych dwóch rozwiązań ciąg będzie malejący. Ciąg jest malejący, gdy $a_1 > a_2 > a_3$.

Dla $m = -2$:

$$a_1 = 2 \cdot (-2) + 11 = -4 + 11 = 7$$

$$a_2 = (-2)^2 + 3 = 4 + 3 = 7$$

$$a_3 = 5 - (-2) = 5 + 2 = 7$$

Dla $m = -2$ ciąg jest stały, więc nie jest malejący.

Dla $m = 2,5$:

$$a_1 = 2 \cdot 2,5 + 11 = 5 + 11 = 16$$

$$a_2 = (2,5)^2 + 3 = 6,25 + 3 = 9,25$$

$$a_3 = 5 - 2,5 = 2,5$$

Dla $m = 2,5$ ciąg jest malejący, ponieważ $16 > 9,25 > 2,5$.

Zatem $m = 2,5$ jest jedyną wartością, dla której ciąg jest arytmetyczny i malejący.

Zadanie 16 (1 pkt)

Dany jest ciąg geometryczny (a_n) określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, w którym $a_1 = 27$ oraz $a_2 = 9$.
Czwarty wyraz ciągu (a_n) jest równy:

- A. $1/3$
- B. 1
- C. 3
- D. 729

✓ **Odpowiedź: B**

Wyjaśnienie:

Krok 1. Obliczenie ilorazu q .

Znając wartości dwóch pierwszych wyrazów ciągu geometrycznego, możemy obliczyć iloraz:

$$q = a_2/a_1 = 9/27 = 1/3$$

Krok 2. Obliczenie wartości czwartego wyrazu ciągu.

Znając wzór na n -ty wyraz ciągu geometrycznego $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, obliczamy:

$$a_4 = a_1 \cdot q^3 = 27 \cdot (1/3)^3 = 27 \cdot 1/27 = 1$$

Zadanie 17 (1 pkt)

Kąt α jest ostry i spełnia warunek $\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} \alpha = 2 \sin \alpha$. Cosinus kąta α jest równy:

- A. $1/2$

B. $\sqrt{2}/2$

C. $\sqrt{3}/2$

D. $\sqrt{3}/3$

✓ **Odpowiedź: C**

Wyjaśnienie:

Korzystamy z zależności trygonometrycznych. Wiemy, że $\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$. Podstawiając to do naszego równania:

$$\sqrt{3} \cdot \sin \alpha / \cos \alpha = 2 \sin \alpha$$

$$\sqrt{3} \cdot \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\sqrt{3} = 2 \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \sqrt{3}/2$$

Zadanie 18 (2 pkt)

Dany jest trójkąt prostokątny ABC, w którym bok BC jest przeciwprostokątną, przyprostokątna AB ma długość 6, a środkowa CD ma długość 5. Oznaczmy kąt ADC przez α , natomiast kąt ABC - przez β .

Zadanie 18.1. (1 pkt)

Tangens kąta α jest równy:

A. $2/3$

B. $3/4$

C. $4/5$

D. $4/3$

✓ **Odpowiedź: D**

Wyjaśnienie:

Z treści zadania wynika, że punkt D dzieli bok AB na dwie równe części, więc $|AD| = 6 \div 2 = 3$.

Spójrzmy teraz na trójkąt ADC. Jest to trójkąt prostokątny, w którym dolna przyprostokątna ma długość 3, a przeciwprostokątna ma długość 5. Długość drugiej przyprostokątnej możemy obliczyć z twierdzenia Pitagorasa:

$$|AC|^2 = |AD|^2 + |DC|^2$$

$$|AC|^2 = 3^2 + |DC|^2 = 9 + |DC|^2$$

Wiemy, że jest to klasyczny trójkąt pitagorejski o bokach 3, 4 oraz 5. Zatem $|DC| = 4$.

Tangens to stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko naszego kąta, względem przyprostokątnej przyległej do tego kąta. W naszym przypadku:

$$\operatorname{tg} \alpha = 4/3$$

Zadanie 18.2. (1 pkt)

Sinus kąta β jest równy:

A. $2/\sqrt{13}$

B. $3/\sqrt{13}$

C. $5/(2\sqrt{13})$

D. $4/5$

✓ **Odpowiedź: A**

Wyjaśnienie:

Krok 1. Obliczenie długości przeciwprostokątnej BC.

Spójrzmy na trójkąt ABC. Wiemy, że przyprostokątne tego trójkąta mają długość 4 oraz 6. Obliczmy długość przeciwprostokątnej BC korzystając z twierdzenia Pitagorasa:

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 = 6^2 + 4^2 = 36 + 16 = 52$$

$$|BC| = \sqrt{52} = \sqrt{4 \cdot 13} = 2\sqrt{13}$$

Krok 2. Obliczenie sinusa kąta β .

Sinus opisuje nam stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta, względem przeciwprostokątnej. W przypadku kąta β :

$$\sin \beta = |AC|/|BC| = 4/(2\sqrt{13}) = 2/\sqrt{13}$$

Zadanie 19 (1 pkt)

Punkty A, B oraz C leżą na okręgu o środku w punkcie O. Miara kąta BCA jest równa 50° .

Miara kąta ostrego ABO jest równa:

A. 20°

B. 35°

C. 40°

D. 50°

✓ **Odpowiedź: C**

Wyjaśnienie:

Krok 1. Wyznaczenie miary kąta AOB.

Kąt AOB jest kątem środkowym, opartym na tym samym łuku co kąt wpisany ACB. Z własności kątów środkowych i wpisanych wynika, że miara kąta środkowego jest dwa razy większa od miary kąta wpisanego ACB, zatem:

$$|\angle AOB| = 2 \cdot 50^\circ = 100^\circ$$

Krok 2. Wyznaczenie miary kąta ABO.

Spójrzmy na trójkąt AOB. Jest to trójkąt równoramienny - ramiona AO oraz BO mają długości równe promieniowi okręgu. Z własności kątów w trójkącie równoramiennym wiemy, że kąty przy podstawie muszą mieć jednakową miarę. Skoro kąt między ramionami wynosi 100° , to na dwa kąty przy podstawie zostaje nam $180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$.

Zatem kąt ABO będzie miał miarę:

$$|\angle ABO| = 80^\circ \div 2 = 40^\circ$$

Zadanie 20 (1pkt)

W trójkącie równoramiennym ABC dane są: $|AC| = |BC| = 4$ i $|AB| = 3$. Na boku BC, między punktami B i C, wybrano taki punkt D, że trójkąty ABC i BDA są podobne.

Odcinek BD ma długość:

- A. 2
- B. 2,25
- C. 2,5
- D. 3

✓ **Odpowiedź: B**

Wyjaśnienie:

Krok 1. Obliczenie skali podobieństwa.

Z treści zadania wiemy, że trójkąty ABC i BDA są podobne. Ważne jest teraz ustalenie odpowiadających sobie boków. W trójkącie ABC ramiona mają długość 4, natomiast w trójkącie BDA ramie BA ma długość 3.

Skala podobieństwa tych trójkątów będzie równa stosunkowi długości odpowiadających sobie boków:

$$k = |BA|/|AC| = 3/4$$

Krok 2. Obliczenie długości odcinka BD.

Odcinek BD w trójkącie BDA odpowiada odcinkowi AB w trójkącie ABC. Zatem:

$$|BD| = k \cdot |AB| = 3/4 \cdot 3 = 9/4 = 2,25$$

Zadanie 21 (1 pkt)

Dany jest trójkąt ABC, w którym $|AB| = 11$, $|BC| = 12$ oraz $|\angle ABC| = 60^\circ$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F - jeśli jest fałszywe.

1. Trójkąt ABC jest równoramienny.
2. Pole trójkąta ABC jest równe $33\sqrt{3}$.

✓ **Odpowiedź:**

1. FAŁSZ
2. PRAWDA

Wyjaśnienie:

Krok 1. Ocena prawdziwości pierwszego zdania.

Chcąc poznać długość trzeciego boku trójkąta, możemy skorzystać z twierdzenia cosinusów:

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \cos 60^\circ$$

$$|AC|^2 = 11^2 + 12^2 - 2 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 1/2$$

$$|AC|^2 = 121 + 144 - 132 = 133$$

$$|AC| = \sqrt{133}$$

Otrzymany wynik jest różny od pozostałych długości boków tego trójkąta, co prowadzi nas do wniosku, że trójkąt ABC ma wszystkie boki różnej długości. Zatem zdanie jest fałszywe.

Krok 2. Ocena prawdziwości drugiego zdania.

Pole trójkąta możemy obliczyć korzystając ze wzoru:

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \sin 60^\circ$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$P = \frac{(11 \cdot 12 \cdot \sqrt{3})}{4} = \frac{(132 \cdot \sqrt{3})}{4} = 33\sqrt{3}$$

Zatem zdanie jest prawdziwe.

Zadanie 22 (1 pkt)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dany jest kwadrat ABCD, w którym $A = (4, -1)$. Przekątne tego kwadratu przecinają się w punkcie $S = (1, 3)$. Przekątna kwadratu ABCD ma długość:

- A. 5
- B. 7
- C. 10
- D. 14

✓ Odpowiedź: C

Wyjaśnienie:

Krok 1. Obliczenie długości odcinka AS.

Skorzystamy ze wzoru na długość odcinka w układzie współrzędnych:

$$|AS| = \sqrt{(x_S - x_A)^2 + (y_S - y_A)^2} = \sqrt{(1 - 4)^2 + (3 - (-1))^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Krok 2. Obliczenie długości przekątnej kwadratu.

Przekątne kwadratu przecinają się w punkcie S, który jest środkiem przekątnej. Oznacza to, że odcinek AS jest połową naszej przekątnej. Zatem cała przekątna ma długość:

$$d = 2 \cdot |AS| = 2 \cdot 5 = 10$$

Zadanie 23 (1 pkt)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) proste k oraz l są określone równaniami:

$$k: y = (m - 2)x + 5$$

$$l: y = -4x + (m + 3)$$

Proste k oraz l są równoległe, gdy liczba m jest równa:

- A. (-4)
- B. (-2)
- C. 2
- D. 5

✓ Odpowiedź: B

Wyjaśnienie:

Dwie proste są względem siebie równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy mają jednakowy współczynnik kierunkowy a . Pierwsza prosta ma współczynnik kierunkowy równy $m - 2$, druga ma równy -4 . Aby były równoległe:

$$m - 2 = -4$$

Zadanie 24 (1 pkt)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) punkt $P = (0, 0)$ leży na okręgu O o środku w punkcie $S = (2, 4)$. Okrąg O jest określony równaniem:

- A. $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 2\sqrt{5}$
- B. $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 20$
- C. $(x + 2)^2 + (y + 4)^2 = 2\sqrt{5}$
- D. $(x + 2)^2 + (y + 4)^2 = 20$

✓ Odpowiedź: B

Wyjaśnienie:

Krok 1. Obliczenie długości promienia okręgu.

Promień okręgu będzie równy długości odcinka PS , który łączy punkt P ze środkiem okręgu S . Korzystając ze wzoru na długość odcinka:

$$|PS| = \sqrt{(x_S - x_P)^2 + (y_S - y_P)^2} = \sqrt{(2 - 0)^2 + (4 - 0)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$$

Krok 2. Zapisanie równania okręgu.

Równanie okręgu o środku (a, b) i promieniu r ma postać:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

W naszym przypadku środek ma współrzędne $(2, 4)$, a $r^2 = 20$, więc równanie okręgu to:

$$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 20$$

Zadanie 25 (3 pkt)

Tworząca stożka ma długość 8. Kąt rozwarcia tego stożka ma miarę 120° . Oblicz objętość tego stożka.

✓ Odpowiedź: $V = 64\pi$

Wyjaśnienie:

Krok 1. Analiza kąta rozwarcia stożka.

Kąt rozwarcia stożka wynosi 120° , co oznacza, że kąt między tworzącą a osią stożka wynosi 60° .

Krok 2. Obliczenie wysokości i promienia podstawy stożka.

Tworząca ma długość 8. Korzystając z własności trójkątów o kątach 30° , 60° , 90° :

- Wysokość stożka będzie stanowić połowę tworzącej: $H = 8 \div 2 = 4$
- Promień podstawy będzie $\sqrt{3}$ razy większy od wysokości: $r = 4\sqrt{3}$

Krok 3. Obliczenie objętości stożka.

Korzystając ze wzoru na objętość stożka:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot H$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (4\sqrt{3})^2 \cdot 4$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 16 \cdot 3 \cdot 4$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \pi$$

$$V = 64\pi$$

Zadanie 26 (1 pkt)

Objętość sześcianu jest równa 729. Długość przekątnej tego sześcianu jest równa:

- A. $9\sqrt{3}$
- B. $9\sqrt{2}$
- C. $3\sqrt{3}$
- D. $3\sqrt{2}$

✓ Odpowiedź: A

Wyjaśnienie:

Krok 1. Obliczenie długości boku sześcianu.

Znając objętość sześcianu, możemy obliczyć długość jego boku:

$$V = a^3$$

$$729 = a^3$$

$$a = \sqrt[3]{729} = \sqrt[3]{9^3} = 9$$

Krok 2. Obliczenie długości przekątnej sześcianu.

Sześcian o boku a ma zawsze przekątną o długości $d = a\sqrt{3}$. Stąd:

$$d = 9\sqrt{3}$$

Zadanie 27 (1 pkt)

Wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych nieparzystych, w których zapisie dziesiętnym występuje dokładnie jeden raz cyfra 0, jest:

- A. 45
- B. 50
- C. 54
- D. 81

✓ Odpowiedź: A

Wyjaśnienie:

Rozważmy wszystkie możliwe pozycje cyfry 0 w trzycyfrowej liczbie nieparzystej:

1. Cyfra 0 na pozycji setek - niemożliwe, bo liczba byłaby wtedy dwucyfrowa.
2. Cyfra 0 na pozycji dziesiątek - pierwsza cyfra może być dowolna od 1 do 9 (9 możliwości), a ostatnia musi być nieparzysta: 1, 3, 5, 7, 9 (5 możliwości). Łącznie: $9 \cdot 1 \cdot 5 = 45$ liczb.
3. Cyfra 0 na pozycji jednostki - niemożliwe, bo liczba byłaby wtedy parzysta.

Zatem wszystkich takich liczb jest 45.

Zadanie 28 (1 pkt)

Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry, która na każdej ścianie ma inną liczbę oczek - od jednego oczka do sześciu oczek. Zdarzenie A polega na tym, że suma liczb wyrzuconych oczek będzie równa 11. Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe:

- A. $1/36$
- B. $6/36$
- C. $11/36$
- D. $2/36$

✓ **Odpowiedź: D**

Wyjaśnienie:

Krok 1. Obliczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych.

Rzucamy dwukrotnie kostką sześcienną, więc zgodnie z regułą mnożenia, wszystkich zdarzeń elementarnych będzie $|\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$.

Krok 2. Obliczenie liczby zdarzeń sprzyjających.

Zdarzeniem sprzyjającym jest wylosowanie pary liczb, których suma oczek da wynik równy 11. Takimi parami są:

$(5, 6), (6, 5)$

Są to więc 2 pary, czyli $|A| = 2$.

Krok 3. Obliczenie prawdopodobieństwa.

Prawdopodobieństwo obliczamy korzystając ze wzoru:

$$P(A) = |A|/|\Omega| = 2/36 = 1/18$$

Zadanie 29 (1 pkt)

Średnia arytmetyczna siedmiu liczb: 1, 2, 3, 4, 5, x, y, jest równa 3. Suma $x + y$ jest równa:

- A. 4
- B. 5
- C. 6
- D. 7

✓ **Odpowiedź: C**

Wyjaśnienie:

Wiemy, że średnia arytmetyczna 7 liczb wynosi 3, więc możemy zapisać równanie:

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + x + y)/7 = 3$$

Przekształcając to równanie:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + x + y = 21$$

$$15 + x + y = 21$$

$$x + y = 6$$

Zadanie 30 (2 pkt)

Na diagramie przedstawiono wyniki sprawdzianu z matematyki w pewnej klasie maturalnej liczącej 24 uczniów. Na osi poziomej podano oceny, które uzyskali uczniowie tej klasy, a na osi pionowej podano liczbę uczniów, którzy otrzymali daną ocenę.

Uzupełnij zdania:

1. Mediana ocen uzyskanych z tego sprawdzianu przez uczniów tej klasy jest równa
2. Dominanta ocen uzyskanych z tego sprawdzianu przez uczniów tej klasy jest równa

✓ **Odpowiedź:**

1. 4,5
2. 6

Wyjaśnienie:

Krok 1. Obliczenie mediany.

Skoro jest parzysta liczba uczniów (24), to mediana będzie średnią arytmetyczną dwóch środkowych ocen. Z diagramu odczytujemy, że rozkład ocen jest następujący:

- Ocena 1: 1 uczeń
- Ocena 2: 3 uczniów
- Ocena 3: 4 uczniów
- Ocena 4: 4 uczniów
- Ocena 5: 5 uczniów
- Ocena 6: 7 uczniów

Razem 24 uczniów. Dwunasty uczeń w uporządkowanym ciągu otrzymał ocenę 4, a trzynasty - ocenę 5.

Stąd mediana wynosi:

$$m = (4+5)/2 = 4,5$$

Krok 2. Wyznaczenie dominanty.

Dominanta to wartość najczęściej występująca w zbiorze danych. Z diagramu widać, że najczęściej występującą oceną była ocena 6, którą otrzymało 7 uczniów.

Zadanie 31 (4 pkt)

Rozważmy wszystkie prostopadłościany ABCDEFGH w których krawędź BC ma długość 4 oraz suma długości wszystkich krawędzi wychodzących z wierzchołka B jest równa 15.

Niech $P(x)$ oznacza funkcję pola powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu w zależności od długości x krawędzi AB.

Wyznacz wzór i dziedzinę funkcji P . Oblicz długość x krawędzi AB tego z rozważanych prostopadłościanów, którego pole powierzchni całkowitej jest największe.

✓ **Odpowiedź:**

Dziedzina: $x \in (0, 11)$

Wzór: $P(x) = -2x^2 + 22x + 88$

Wartość x : $11/2$

Wyjaśnienie:

Krok 1. Ustalenie wymiarów prostopadłościanu.

Z treści zadania wiemy, że $|BC| = 4$. Oznaczmy pozostałe wymiary: $|AB| = x$ oraz wysokość h . Z warunków zadania:

$$x + 4 + h = 15$$

$$h = 11 - x$$

Krok 2. Wzór funkcji pola całkowitej powierzchni.

Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu można obliczyć jako:

$$P = 2(x \cdot 4 + x \cdot h + 4 \cdot h)$$

$$P = 2(4x + x(11-x) + 4(11-x))$$

$$P = 2(4x + 11x - x^2 + 44 - 4x)$$

$$P = 2(11x - x^2 + 44)$$

$$P = -2x^2 + 22x + 88$$

Krok 3. Dziedzina funkcji $P(x)$.

Wszystkie długości krawędzi muszą być większe od zera, zatem:

$$x > 0 \text{ oraz } h > 0$$

$$x > 0 \text{ oraz } 11 - x > 0$$

$$x > 0 \text{ oraz } x < 11$$

Stąd $x \in (0, 11)$.

Krok 4. Wyznaczenie wartości x , dla której pole jest największe.

Funkcja kwadratowa $P(x) = -2x^2 + 22x + 88$ ma współczynnik przy x^2 ujemny, więc jej wykres jest parabolą skierowaną ramionami w dół. Oznacza to, że osiąga maksimum w wierzchołku. Współrzędna x wierzchołka paraboli $ax^2 + bx + c$ wynosi $x = -b/(2a)$. W naszym przypadku:

$$x_w = -22/(2 \cdot (-2)) = 22/4 = 11/2 = 5,5$$

Zatem pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu jest największe, gdy $x = 11/2$.